

HOLT, WINTERS ve BROWN ÜSTEL DÜZELTME YÖNTEMİ

Ferhan DEMİRTAŞ — Fehmi DİNÇER — Sıtkı GÜRLER
Proje Değerlendirme ve İzleme Müdürlüğü
Yetkili Uzman Yardımcıları

İktisadi yaşamın işleyişinde, işletme yöneticilerinin sık sık karşılaştıkları sorunlardan biri çok sayıda ürettikleri ürünler için kısa dönemli öngörüler yapabilmektir. Çok sayıda ürünler için kısa dönemli öngörüler hazırlamak, örneğin bir üretim hattındaki çeşitli ürünler için talep tahminlerine dayanan bir üretim programı yapmak durumunda olan bir yönetici için zorunluluktur. İşletme yöneticileri, geçmiş dönemlerde gerçekleşmiş verilere dayanan kısa dönemli kesin (accuracy), anlamlı öngörüler sağlayan ve çeşitli durumların herbirine kolayca uygulanabilen tekniklere ihtiyaç duyarlar. Bu yazıda, yukarıda anlatılan durumlarda uygulanabilecek üstel düzeltme tekniklerinden "Winters'ın Doğrusal ve Mevsimsel Üstel Düzeltme", "Holt'un iki parametrelili Doğrusal Üstel Düzeltme" ve "Brown'ın Tek Parametrelili Kuadratik Üstel Düzeltme" modellerini kısaca anlatmaya çalışacağız.

WINTERS'ın DOĞRUSAL ve MEVSİMSEL ÜSTEL DÜZELTME YÖNTEMİ

Üstel Düzeltme Tekniklerinin, gelişmiş formlarından olan bu teknik, Peter WINTERS tarafından 1960'lı yılların başlarında geliştirilmiştir. Bu yöntem çifte üstel düzeltmeye benzer sonuçlar ortaya koymakla birlikte trend uyarlamasının yanında mevsimsel uyarlamayı da içerdiğinden, trend ve mevsimsel kalıbın bulunduğu bir veri setinin öngörülmesinde kullanılabilir.

Winters'ın doğrusal ve mevsimsel üstel düzeltme tekniği, bir veri kalıbındaki parçalardan (Rassallık, Doğrusal ve Mevsimsel) herbiri ile ilişkilendirilmiş bir parametreyi düzelteren (Smooth) 3 denkleme dayanmaktadır. Bu denklemler aşağıda verilmiştir .

$$S_t = \alpha \frac{X_t}{I_{t-L}} + (1 - \alpha) (S_{t-1} + b_{t-1}) \quad (1)$$

$$b_t = \gamma (S_t - S_{t-1}) + (1 - \gamma)b_{t-1} \quad (2)$$

$$I_t = \beta \frac{X_t}{S_t} + (1 - \beta) I_{t-L} \quad (3)$$

Burada :

L : Mevsimsel Uzunluk (Örneğin 1 yıl-daki 3 er aylık dönemler)

I : Mevsimsel uyarlama faktörüdür.

I eşitliği, mevsimsel indeksin karşılığıdır. Bu indeks, serinin cari değerinin (X_t) serinin tekli düzeltilmiş cari değerine (S_t) bölünmesiyle bulunan bir orandır. Eğer X_t , S_t 'den büyükse, oran 1 den büyük, küçükse 1'den küçük olacaktır. Bu yöntemin ve mevsimsel indeksin (I) rolünün anlaşılmasındaki önem, S_t 'nin serinin mevsimselliği kapsamayan ortalama değerinin düzeltilmiş bir değeri olmasıdır. Bununla beraber gerçek veri değerleri (X_t) mevsimselliği kapsar, ayrıca X_t 'nin serideki herbir rassallığıda kapsadığı hatırlanmalıdır. Bu rassallığı düzeltmek için I eşitliği, yeni hesaplanmış mevsimsel faktör (X_t/S_t) β ile aynı mevsimin yerini tutan daha önceki mevsimsel sayı (I_{t-L}), $(1 - \beta)$ ile ağırlıklandırılır.

b_t eşitliği basit olarak, artan trend ($S_t - S_{t-1}$) γ ile, önceki trend değeri (b_{t-1}) $(1 - \gamma)$ ile ağırlıklandırıldığı için düzeltilmiş trenddir. Eşitlikte düzeltilmiş değer (S_t) için, ilk dönem mevsimsel sayıya (I_{t-L}) bölünür. Bu şekilde X_t mevsimsel düzensiz değişimlerden arındırılmış olur. Bu düzeltme, $t-L$ dönemdeki değer aynı mevsime ait ortalama büyüklüğü olduğunda I_{t-L} nin 1 den büyük olmasıyla gösterilebilir. X_t nin 1 den büyük bu sayıda bölünmesi, mevsimsel dönemin $(t-L)$ ortalama büyüklüğü olduğu miktara eşit bir yüzde ile orijinal değerden küçük bir değer verir. Aksi bir düzeltme mevsimsel sayı 1 den küçük olduğunda ortaya çıkar. Bu hesaplamalarda, I_t , S_t bilinene kadar hesaplanmadığı için I_{t-L} değeri kullanılır.

Winters yöntemi ile tahmin şu şekilde yapılır.

$$S_{t+m} = (S_t + b_t m) I_{t-L+m} \quad (4)$$

Winters yönteminin uygulamasını göstermek için Tablo 1 de verilen verileri kullanabiliriz. $\alpha = .2$, $\beta = .05$ ve $\gamma = .1$ parametre değerlerini kullanarak elde edilen tahminler ve ilgili düzeltilmiş değerler Tablo 2 de gösterilmiştir .

TABLO 1 : 3'er AYLIK SATIŞ VERİLERİ :

| YILLAR | 3'er AYLIK DÖNEMLER | DÖNEM SAYISI | SATIŞLAR (MİLYON TL) |
|--------|---------------------|--------------|----------------------|
| 1980 | 1 | 1 | 362 |
| | 2 | 2 | 385 |
| | 3 | 3 | 432 |
| | 4 | 4 | 341 |
| 1981 | 1 | 5 | 382 |
| | 2 | 6 | 409 |
| | 3 | 7 | 498 |
| | 4 | 8 | 387 |
| 1982 | 1 | 9 | 473 |
| | 2 | 10 | 513 |
| | 3 | 11 | 582 |
| | 4 | 12 | 474 |
| 1983 | 1 | 13 | 544 |
| | 2 | 14 | 582 |
| | 3 | 15 | 681 |
| | 4 | 16 | 557 |
| 1984 | 1 | 17 | 628 |
| | 2 | 18 | 707 |
| | 3 | 19 | 773 |
| | 4 | 20 | 592 |
| 1985 | 1 | 21 | 627 |
| | 2 | 22 | 725 |
| | 3 | 23 | 854 |
| | 4 | 24 | 661 |

TABLO 2 : Tablo 1 deki Mevsimsel Verilere, Winters Doğrusal ve Üssel Mevsimsel Düzeltme Yönteminin Uygulanması

| DÖNEM | GERÇEK DEĞERLER | DÜZELTİLMİŞ DEĞERLER S_t | DÜZELTİLMİŞ MEVSİMSEL İNDEKS I_t | DÜZELTİLMİŞ DEĞER b_t | $m = 1$ OLDUĞUNDA TAHMİN |
|-------|-----------------|----------------------------|------------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1 | 362.00 | | 0.95 | | |
| 2 | 385.00 | | 1.01 | | |
| 3 | 432.00 | | 1.14 | | |
| 4 | 341.00 | | 0.90 | | |
| 5 | 382.00 | 382.00 | 1.00 | 9.17 | |
| 6 | 409.00 | 394.05 | 1.07 | 14.70 | 424.79 |
| 7 | 498.00 | 411.62 | 1.18 | 14.99 | 481.10 |
| 8 | 387.00 | 427.39 | 0.90 | 15.07 | 383.53 |
| 9 | 473.00 | 448.17 | 1.01 | 15.64 | 444.32 |
| 10 | 513.00 | 467.08 | 1.07 | 15.97 | 495.53 |
| 11 | 582.00 | 485.20 | 1.18 | 16.18 | 569.34 |
| 12 | 474.00 | 506.52 | 0.90 | 16.70 | 450.90 |
| 13 | 544.00 | 526.64 | 1.01 | 17.04 | 526.75 |
| 14 | 582.00 | 543.74 | 1.07 | 17.04 | 581.68 |
| 15 | 681.00 | 564.08 | 1.18 | 17.37 | 661.55 |
| 16 | 557.00 | 588.78 | 0.90 | 18.11 | 523.98 |
| 17 | 628.00 | 610.11 | 1.01 | 18.43 | 611.79 |
| 18 | 707.00 | 634.99 | 1.07 | 19.07 | 672.48 |
| 19 | 773.00 | 654.15 | 1.18 | 19.08 | 772.49 |
| 20 | 592.00 | 669.65 | 0.90 | 18.72 | 608.19 |
| 21 | 627.00 | 674.96 | 1.01 | 17.38 | 694.66 |
| 22 | 725.00 | 689.13 | 1.07 | 17.06 | 742.26 |
| 23 | 854.00 | 709.56 | 1.18 | 17.40 | 834.08 |
| 24 | 661.00 | 728.06 | 0.90 | 17.51 | 654.03 |
| 25 | | | | | 753.00 |

Winters yönteminin uygulanmasında gerekli hesaplamalar Tablo 2 deki sonuçlar alınarak 24. dönem için aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{İlk olarak } S_{24} &= [S_{23} + b_{23} (1)] I_{20} \\ &= (709.56 + 17.4).90 \\ &= 654.03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sonra } S_{24} &= (.20) \frac{X_{24}}{I_{20}} + .8 (S_{23} + b_{23}) \\ &= .2 \frac{661}{.90} + .8 (709.56 + 17.40) \\ &= 728.06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daha Sonra, } b_{24} &= .1 (S_{24} - S_{23}) + .9 b_{23} \\ &= .1 (728.06 - 709.56) + .9(17.40) \\ &= 17.51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ve } I_{24} &= .05 \frac{X_{24}}{S_{24}} + .95 I_{20} \\ &= .05 \frac{661}{728.06} + .95 (.9024) \\ &= .9027 \end{aligned}$$

25,26,27 ve 28 inci dönemler için tahminler mevsimsel indekslerin ve m değerinin değiştirilmesiyle elde edilir.

$$\begin{aligned} S_{25} &= (728.06 + 17.51 (1)) (1.01) = 753.0 \\ S_{26} &= (728.06 + 17.51 (2)) (1.07) = 816.5 \\ S_{27} &= (728.06 + 17.51 (3)) (1.18) = 921.1 \\ S_{28} &= (728.06 + 17.51 (4)) (.90) = 718.3 \end{aligned}$$

Winters yönteminin uygulanmasındaki sorunlardan biri, hata kareleri ortalamasını (MSE) minimize edecek α, β ve γ değerlerinin belirlenmesidir. Bunun yapılmasında tek yaklaşım deneme, yanılmadır. En iyi değerlerin araştırılması hata kareleri ortalamasını (MSE) azaltan değerlerin değişme yönünden her parametrenin belirlenmesiyle yapılır. Parametre değerleri, hata kareleri ortalamasını (MSE) minimum kılacak değer setini bulmak için artan bir şekilde değiştirilerek en uygun değerler bulunmaya çalışılır.

HOLT'un İKİ PARAMETRELİ DOĞRUSAL ÜSTEL DÜZELTME YÖNTEMİ

Bu yöntem, trendi tahmin ederek öngörü yapmakta kullanılır. Holt'un modelindeki 3 denklem aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha X_t + (1 - \alpha) (S_{t-1} + b_{t-1}) \quad (5) \\ b_t &= \beta (S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1} \quad (6) \\ S_{t+m} &= S_t + b_t m \quad (7) \end{aligned}$$

(5) nolu denklemin basit üstel düzeltme denkleminin tek farkı, b_{t-1} değerinin trend için

eklenmiş olmasıdır. Bu değer, (6) nolu denklem kullanılarak hesaplanır. Ardarda gelen iki üstel düzeltilmiş değer arasındaki fark, trendin tahmini olarak kullanılır. Trend tahmini, β ile ve eski trend tahmini de $(1-\beta)$ ile çarpılarak düzeltilir.

Bu yöntemde α ve β parametreleri optimal olarak seçilerek hata kareleri ortalamaları minimuma indirilecektir. Böylece bu model rassallığa ve trendde farklı ağırlıklar verme olanağı yaratmaktadır.

BROWN'ın TEK PARAMETRELİ KUADRATİK ÜSTEL DÜZELTME YÖNTEMİ

Bu yöntem Doğrusal Üstel Düzeltme Modelinin geliştirilmiş bir formudur. Doğrusal bir trendten daha yüksek dereceden trendle uğraşımı amaçlamaktadır. Brown'ın modelinde kullanılan yedi denklem aşağıda verilmiştir :

$$S_t' = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}' \quad (8)$$

$$S_t'' = \alpha S_t' + (1 - \alpha) S_{t-1}'' \quad (9)$$

$$S_t''' = \alpha S_t'' + (1 - \alpha) S_{t-1}''' \quad (10)$$

$$a_t = 3 S_t' - 3 S_t'' + S_{t-1}''' \quad (11)$$

$$b_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} [(6-\alpha) S_t' - (10-8\alpha) S_{t-1}'' + (4-3\alpha) S_{t-1}'''] \quad (12)$$

$$C_t = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} (S_t' - 2 S_t'' + S_{t-1}''') \quad (13)$$

$$S_{t+m} = a_t + b_t m + \frac{1}{2} C_t m^2 \quad (14)$$

Yukarıda denklemlerde, (8) nolu denklem basit üstel düzeltmeyi, (9) nolu denklem çifte üstel düzeltmeyi, (10) nolu denklem üçlü üstel düzeltmeyi, (11) nolu denklem verinin şimdiki değerini belirler, (12) nolu denklem, doğrusal trendi belirler, (13) nolu denklem, kuadratik eğilimi belirler, (14) nolu denklem ise Brown'ın nihai öngörü denklemini göstermektedir.

Görüldüğü gibi kuadratik üstel düzeltme, doğrusal düzeltmeden daha karmaşıktır. Fakat düzeltme ilkesi aynıdır. Doğrusal düzeltme ($a_t + b_t m$) doğru denklemini kullanırken, kuadratik (ikinci dereceden denklem) denklemini kullanmaktadır. Tekli ve doğrusal düzeltme dönüş noktaları iyi tahmin edememektedir. Kuadratik düzeltme (Brown yöntemi) bunu daha iyi başarmaktadır. Ancak verideki rassal değişimlerden daha fazla etkilenmektedir. Bu yüzden öngörü yapanın biryandan verideki kalıbın gösterdiği değişimleri izlemek, diğer yandan da rassal dalgalanmaları kalıptaki değişimlerden ayırt etmek isterken karşılaşılan sorunlar bu yöntemin sakıncalarıdır.