# Enflasyon Koşullarında Optimal Portföy Seçimi

**Fehmi DİNÇER**
İstanbul Menkul Kıymetler Merkezi Uzmanı

## GİRİŞ

Ülkemizde sermaye piyasasının geliştirme koşut olarak portföy yönetimi gerek yatırımcılar ve gerekse mali aracı kurumlar açısından büyük önem kazanmıştır. Uygulanan iktisadi politikaların bir sonucu olarak enflasyon beklentilerinin belirsizleşmesi portföy seçiminin önemini daha da arttırmaktadır. Bu yazıda belirsiz enflasyon koşullarında sıralama araçlarından (ranking devices) faydalanılarak optimal portföy yapısını belirlemek için geliştirilmiş bir model anlatılmaya çalışılacaktır.

## ENFLASYON KOŞULLARINDA OPTİMAL PORTFÖY AĞIRLIKLARI

Bilindiği gibi farklı menkul kıymetlerin getirileri enflasyondan farklı şekilde etkilenirler. Diğer bir deyişle, bir kısım menkul kıymetlerin getirisi yüksek enflasyon dönemlerinde daha az değişkenlik gösterdiğinden diğer menkul kıymetlerden daha güvenilir olmaktadır. Örneğin, genel bir kural olarak hisse senedi getirisi ile enflasyon arasında negatif bir ilişki olduğu söylenebilir.

Yatırımcının amacı enflasyon koşullarında gerçek getirinin riske oranını maksimize edecek optimal portföy ağırlıklarının (Wi) elde etmektedir. Bunu aşağıdaki formüle şöyle özetleyebiliriz:

$$R_{max.} = \frac{\bar{R}_p - R_f}{\sigma_p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{W_i \bar{R}_i - R_f}{\sigma_p}$$

Burada

$\bar{R}_p$ = portföyün beklenen getirisi,

$R_f$ = risksiz getiri oranı,

$\bar{R}_i$ = i.menkul kıymetin beklenen getirisi,

$\sigma_p$ = portföy getirisinin standart sapması

Bir menkul kıymetin gerçek getirisinin genelleştirilmiş iki değişkenli getiri modelini aşağıdaki gibi varsayalım:

$$R_{it} = \beta_{oi} + \beta_1 R_{mt} + \beta_{2i} \Delta P_t + \varepsilon_{it}$$

Burada,

$R_{mt}$ = t döneminde pazar indeksinin getiri oranı,

$\Delta P_t$ = t döneminde enflasyon oranı,

$\beta_{i1}$ = pazar getirisindeki değişkenliklerin finansal varlığın getirisine duyarlılığının ölçüsü

$\beta_{i2}$ = enflasyon oranındaki değişikliklerin finansal varlığın getirisine duyarlılığının ölçüsü

Modelimizde öncelikle ''açıktan satış (short sales) yapılmadığı varsayılmıştır. Daha sonra bu varsayım kaldırılarak model geliştirilecektir.

Şimdi yukarıdaki (1) ve (2) eşitliğini kullanarak N adet menkul kıymetten oluşan oluşan bir portföyün enflasyon koşullarında optimal portföy ağırlıklarını $(W_i^o)$ belirleyebiliriz:

$$W_i^o = \frac{\Omega_i}{\sum_{j=1}^{k} \Omega_j} \qquad i = 1, 2, \ldots, k \ (\leq N)$$

$$\Omega = \frac{1}{\sigma_{ei}^2}\left((\bar{R}_i - R_f) - \Phi_i\right)$$

$$\Phi_i = \frac{\theta - \pi\lambda}{1+\rho}\left(\beta_{1i}\sigma_m^2 + \beta_{2i}\sigma_{m,\Delta P}\right) + \pi\left(\beta_{2i}\cdot\sigma_{\Delta P}^2 + \beta_{1i}\cdot\sigma_{m,\Delta P}\right)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\bar{R}_i - R_f}{\sigma_{ei}^2}\right)\cdot\beta_{1i}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_{1i}^2\,\sigma_{m,\Delta P} + \beta_{1i}\,\beta_{2i}\cdot\sigma_{\Delta P}^2}{\sigma_{ei}^2}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_{1i}^2\,\sigma_m^2 + \beta_{1i}\,\beta_{2i}\,\sigma_{m,\Delta P}}{\sigma_{ei}^2}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\bar{R}_i - R_f}{\sigma_{ei}^2}\right)\beta_{2i}$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_{2i}^2\cdot\sigma_{m,\Delta P} + \beta_{1i}\cdot\beta_{2i}\,\sigma_m^2}{\sigma_{ei}^2}$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_{2i}\cdot\sigma_{\Delta P}^2 + \beta_{1i}\cdot\beta_{2i}\cdot\sigma_{m,\Delta P}}{\sigma_{ei}^2}$$

$$\pi = \frac{\delta - \frac{\theta\cdot\alpha}{1+\rho}}{1 + \eta - \frac{\lambda\alpha}{1+\rho}}$$

$\sigma_m^2$ = pazar getirisinin varyansı,

$\sigma_{\Delta p}^2$ = enflasyon oranının varyansı,

$\sigma_{m\Delta p}$ = enflasyon oranı ve pazar getiri oranı arasındaki kovaryans,

$\sigma_{ei}^2$ = i.menkul kıymetin getirisinin varyansı

Optimal portföydeki (k) menkul kıymetlerin sayısı, optimal portföy seçiminde kullanılan menkul kıymetlerin sayısına (N) eşit yada daha azdır ($k \leq N$) ''Açıktan satış'a izin verilmediği varsayıldığından dolayı negatif ağırlıklı menkul kıymetler modele alınmamıştır.

## ÖRNEK UYGULAMA

Şimdi yukarıdaki modelimizi hipotetik bir örnek üzerinde aşamalı bir şekilde anlatmaya çalışalım. Örneğimizde altı menkul kıymet bulunmaktadır. Bu menkul kıymetlerle ilgili istatistiksel veriler aşağıda Tablo 1'de özetlenmiştir.

TABLO-1
OPTİMAL PORTFÖYÜ BELİRLEMEK İÇİN GEREKLİ VERİLER

| Menkul Kıymet Sayısı (1) | (2) $\bar{R}_i$ | (3) $\beta_{1i}$ | (4) $\beta_{2i}$ | (5) $\sigma_{ei}^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.14 | 1.8 | -1.4 | 0.40 |
| 2 | 0.11 | 1.6 | -1.2 | 0.35 |
| 3 | 0.09 | 1.3 | -1.1 | 0.25 |
| 4 | 0.08 | 0.8 | 0.3 | 0.15 |
| 5 | 0.07 | 0.6 | 1.1 | 0.10 |
| 6 | 0.07 | 0.3 | 1.1 | 0.12 |

$R_f = 0.06 \quad \sigma_m^2 = 0.062 \quad \sigma_{\Delta p}^2 = 0.085 \quad \sigma_{m\Delta P} = -0.03$

''Açıktan satış'' olmaksızın optimal ağırlıkları elde etmek için ilk olarak ''açıktan satış'' sınırlandırılmamış gibi (k=N) (3) eşitliğini çözmemiz gerekir. Bu durumda bu altı menkul kıymet başlangıç (preliminary) ağırlıklarına (Wi yada $\Omega$i) göre sınırlandırılacaktır. Bu başlangıç sıralamasından sonra (3) eşitliği önce birinci menkul kıymeti (başlangıç ağırlıklarına göre sıralamada), sonra birinci ve ikinci menkul kıymetleri içerecek şekilde örneğimizdeki altı menkul kıymet için negatif değerli (ağırlıklı) bir $\Omega$ menkul kıymeti buluncaya kadar süreç devam edecek şekilde çözülecektir. Negatif değerli $\Omega$ bulunduğu anda optimal portföy geçmiş iterasyonlardaki pozitif değerli $\Omega$'ları içeren menkul kıymetlerden oluşur.

Şimdi bu süreci ayrıntılı bir şekilde anlatmaya çalışalım.

I. AŞAMA: Ortak Parametrelerin Hesaplanması

Bu aşamada Tablo 1'de özetlenen veriler kullanılarak altı menkul kıymetin ortak parametreleri olan $\theta, \lambda, \rho, \delta, \alpha, \eta$ ve $\pi$ sırasıyla hesaplanır.

Örneğimizde bu işlemleri yaparsak aşağıdaki sonuçları buluruz.

$\theta$ = 0.9363 $\qquad$ $\alpha$ = -1.5751
$\lambda$ = -1.3790 $\qquad$ $\eta$ = 3.6828
$\rho$ = 2.0699 $\qquad$ $\pi$ = 0.0399
$\delta$ = -0.3218

Yukarıdaki bu parametrelerin ayrıntılı hesaplaması Tablo 2'de verilmiştir.

II. AŞAMA: $\Omega_i$'ler İçin Başlangıç Değerlerinin Hesaplanması

Bu aşamada ise $\Omega_i$'ler için başlangıç değerleri hesaplanır. Öncelikle hangi menkul kıymetlerin optimal portföyde yeralacağını belirtmek için bizim $\Omega_i$'nin başlangıç değerlerine ve bu nedenlede $\phi_i$ değerlerine (5 eşitliği) ihtiyacımız vardır. Önce herbir menkul kıymet için $\phi_i$ değerleri hesaplanır. Daha sonra bu değerler ($\phi_i$'ler), $\Omega_i$'de yerine konursa $\Omega_i$'lerin başlangıç değerleri hesaplanmış olur. Örneğimizin sonuçları Tablo 3'de özetlenmiştir.

TABLO - 3
BAŞLANGIÇ $\Omega_i$ DEĞERLERİ VE SIRALAMA

| Menkul Kıymet | Açıktan Satış Durumunda $\Omega_i$ Değerleri | Sıralama |
|---|---|---|
| 1 | 0.0933 | 2 |
| 2 | 0.0351 | 5 |
| 3 | - 0.0056 | 6 |
| 4 | 0.0453 | 4 |
| 5 | 0.0690 | 3 |
| 6 | 0.0942 | 1 |

TABLO-2
OPTİMUM PORTFÖYÜN BELİRLENMESİNDE YAPILAN HESAPLAMALARIN ÖZETİ

| Menkul Kıymet Sayısı | (6) $\frac{R_i - R_f}{\sigma^2_{ei}}$ | (7) $\frac{(6).(3)}{}$ $\left[\frac{(\bar{R}_i - \bar{R}_f)}{\sigma^2_{ei}}\right]$ | (8) $\frac{(6).(4)}{}$ $\left[\frac{(\bar{R}_i - R_f)}{\sigma^2_{ei}}\right]\beta_{2i}$ | (9) $\beta_{1i}\beta_{2i}\sigma^2_{\Delta p}$ | (10) $\beta^2_{1i}\sigma_{m\Delta P}$ | (11) $\frac{(9)+(10)}{(5)}$ | (12) $\beta^2_{1i}\sigma^2_m$ | (13) $\beta_{1i}\beta_{2i}\sigma_{m\Delta P}$ | (14) $\frac{(12)+(13)}{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2000 | 0.3600 | - 0.2800 | - 0.2142 | - 0.0972 | 0.7785 | 0.2009 | 0.0756 | 0.6912 |
| 2 | 0.1428 | 0.2286 | - 0.1714 | - 0.1632 | - 0.0768 | - 0.6857 | 0.1587 | 0.0576 | 0.6180 |
| 3 | 0.1200 | 0.1560 | - 0.1320 | - 0.1215 | - 0.0507 | 0.6890 | 0.1048 | 0.0429 | 0.5908 |
| 4 | 0.1333 | 0.1067 | 0.0400 | 0.0204 | - 0.0192 | 0.0080 | 0.0397 | - 0.0072 | 0.2167 |
| 5 | 0.1000 | 0.0600 | 0.1300 | 0.0663 | - 0.0108 | 0.5550 | 0.0223 | - 0.0234 | - 0.0110 |
| 6 | 0.0833 | 0.0250 | 0.0916 | 0.0281 | - 0.0027 | 0.2112 | 0.0056 | - 0.0099 | - 0.0358 |
| | | $\theta$=0.9363 | | | | $\lambda$=-1.3790 | | | $\rho$=2.0699 |

| Menkul Kıymet Sayısı | (15) $\beta_{1i}\beta_{2i}\sigma^2_m$ | (16) $\beta^2_{2i}\sigma_{m\Delta P}$ | (17) $\frac{(15)+(16)}{(5)}$ | (18) $\beta^2_{2i}\sigma^2_{\Delta P}$ | (19) $\frac{(13)+(18)}{(5)}$ | (20) $\beta_{1i}\sigma^2_m + \beta_{2i}\sigma_{m\Delta P}$ | (21) $\beta_{2i}\sigma^2_{\Delta P} + \beta_{1i}\sigma_{m\Delta P}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - 0.15624 | - 0.0588 | - 0.5376 | 0.16660 | 0.6055 | 0.1536 ($H_1$) | - 0.1730 ($I_1$) |
| 2 | - 0.11904 | - 0.0432 | - 0.1635 | - 0.12240 | 0.5142 | 0.1352 ($H_2$) | - 0.1500 ($I_2$) |
| 3 | - 0.08866 | - 0.0363 | - 0.4998 | 0.10285 | 0.5830 | 0.1136 ($H_3$) | - 0.1325 ($I_3$) |
| 4 | 0.01488 | - 0.0027 | 0.0812 | 0.00765 | 0.0030 | 0.0406 ($H_4$) | 0.0015 ($I_4$) |
| 5 | 0.04836 | - 0.0507 | - 0.0234 | 0.14368 | 1.2025 | - 0.0018 ($H_5$) | - 0.0925 ($I_5$) |
| 6 | 0.02046 | - 0.0363 | - 0.1320 | 0.10285 | 0.7746 | - 0.0144 ($H_6$) | 0.0845 ($I_6$) |
| | | | | | $\eta$=3.6828 | | |

''Açıktan satış''a izin verildiği varsayımı altında portföy ağırlıkları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$W_i^o = \frac{\Omega_i}{\sum_{i=1}^{N} |\Omega_i|}$$

Eğer ''açıktan satış''a izin verilmezse ek aşamalar gereklidir.

III. AŞAMA: Pozitif Ağırlıklı Menkul Kıymetlerin Seçimi

Bu aşamada pozitif ağırlıklı (pozitif $\Omega_i$'ler) menkul kıymetleri bulmak için eşitlik (4)'ü tekrar çözmemiz ve açıktan satışları (negatif $\Omega_i$'ler) dışarıda bırakmamız gerekecektir. Tablo 3'de $\Omega_i$ değerlerinde altıncı menkul kıymet sıralamada birinci olduğundan altıncı menkul kıymet optimal portföyde birinci olarak yer alacaktır. Altıncı menkul kıymet için $\Omega$'nin işaretini kontrol etmek için daha önceki $\pi$ formülünü çözmemiz gerekir.

$$\pi_6 = \frac{\delta_6 - \frac{\theta_6 \cdot \alpha_6}{1+\rho_6}}{1+\eta_6 - \frac{\lambda_6 \cdot \alpha_6}{1+\rho_6}}$$

$$\pi_6 = \frac{0.0916 - \frac{(0.0250)(-0.1320)}{1+(-0.0358)}}{1+0.7746 - \frac{(0.2112)(-0.1320)}{1+(-0.0358)}}$$

$= 0.0527$

Yukarıda parametrelerin değerleri sadece altıncı menkul kıymet içindir. Bu parametre değerlerini Tablo 2'den kolaylıkla bulabiliriz:

$$\phi_6 = \frac{\theta_6 - \pi_6 \lambda_6}{1+\rho_6}[H_6] + \pi_6 [I_6]$$

$$= \frac{(0.0250) - (0.0527)(0.2112)}{1+(-0.0358)}$$

$(-0.0144)+(0.0527)(0.0845)=0.0042$

Burada hesaplamaları kolaylaştırmak amacıyla, $H_i = \beta_{1i}\sigma_m^2 + \beta_{2i}\sigma_{m\Delta P}$ $I_i = \beta_{2i}\sigma_P^2 + \beta_{li}\sigma_{m,\Delta P}$ olarak alınmıştır.

$$\Omega_6 = \frac{1}{\sigma_{e,6}^2}\left[(R_6 - R_f) - \phi_{(6)}\right]$$

$$= \frac{1}{0.12}(0.07-0.06) - 0.0042) =$$

$0.0483 > 0$

$\Omega_6 > 0$ olduğundan dolayı altıncı menkul kıymet optimal portföye dahildir. Bu süreç, negatif değerli $\Omega$ değeri ile karşılaşıncaya kadar diğer bütün menkul kıymetler için kontrol edilerek devam edecektir. Örneğimizde üçüncü menkul kıymet hariç bütün menkul kıymetler testi geçmektedir. Çünkü üçüncü menkul kıymetin $\Omega$ değeri ($\Omega_3 = -0.0056 < 0$) negatiftir.

IV. AŞAMA: Optimal Ağırlıkların Hesaplanması

Bu aşamada, 6,1,5,4 ve 2. menkul kıymetler için üçüncü aşamada hesaplanan parametrelerin sonuç seti kullanılarak $\Omega_i$'lerin yeni (son) değerlerini ve optimal ağırlıklarını ($W_i^o$) hesaplayabiliriz. 6,1,5,4 ve 2'nin sonuç seti aşağıdaki gibidir.

$\theta = 0.7803$ $\alpha = -1.0753$
$\lambda = -0.6900$ $\eta = -1.6753$
$\rho = 1.4791$ $\pi = -0.0391$
$\delta = -0.1898$

Ancak $\phi_i$, $\Omega_i$'deki bir terim olduğundan öncelikle $\phi_i$'yi hesaplamak gerekecektir.

$$\phi_i = \frac{\theta - \pi\lambda}{1+\rho}(H_i) + \pi\,(I_i)$$

$$= (0.3256)(H_i) + (0.0391)(I_i)$$

$\phi_1 = 0.0432$ $\phi_5 = 0.0030$
$\phi_2 = 0.0382$ $\phi_6 = -0.0014$
$\phi_4 = 0.0133$

Daha sonra $\Omega_i$'leri hesaplarız;

$\Omega_1 = 0.0920$ $\Omega_5 = 0.0700$
$\Omega_2 = 0.0337$ $\Omega_6 = -0.0950$
$\Omega_4 = 0.0447$

Sonuç olarak optimal ağırlıkları hesaplarsak;

$$W_1^6 = \frac{\Omega_1}{\sum_{j=1, j\neq 3}^{6} \Omega_j} = \frac{0.0920}{0.3354} = 0.2743$$

$W_2^o = 0.1005$ $W_5^o = 0.2087$

$W_4^o = 0.1333$ $W_6^o = 0.2832$

## SONUÇ

Portföy seçiminde, fiyatlar veri olarak alındığında yatırımcıların oluşturacakları portföylere hangi menkul kıymetleri hangi ağırlıklarda alarak, getiriyi maksimize ve riski minimize eden optimal portföye ulaşmada önemli bir sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. Diğer taraftan farklı menkul kıymetlerin, enflasyondan farklı şekillerde etkilenmesi dolayısıyla bu durum portföy yöneticisi açısından önem taşımaktadır. Bu nedenle optimal portföy yapısı belirlenmeye çalışılırken enflasyon gözden uzak tutulmamalı ve yapılan hesaplamalarda dikkate alınmalıdır. Özellikle enflasyonun yüksek olduğu koşullarda bu durum daha belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır.